

Ειδική περίπτωση ευθείας στο επίπεδο (π.χ. Oxy) $\rightarrow z=0$

Γενικά, η $(\epsilon): \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{\gamma}, P_1(x_1, y_1, z_1) \in (\epsilon), \vec{\alpha} = (a, b, \gamma) \parallel (\epsilon)$

ή $(\epsilon): \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2) \in (\epsilon)$

• Αν $z=0$ $\Rightarrow (\epsilon): \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, όπως $P_1(x_1, y_1, 0), P_2(x_2, y_2, 0)$
ή $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Συντελεστής διεύθυνσης διανυσματος $\vec{\alpha} = (a, b)$, ορίζεται ως ο αριθμός $\lambda = \frac{b}{a}$. Αν $a=0$, δεν ορίζεται ο συντελεστής, ή συμβολικά $\lambda = \infty$.

(αν το διάνυσμα είναι κάθετο στον xx' ή $\parallel$ στον yy')

Παρατήρηση: Δύο συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, καθώς $\vec{\alpha} = k\vec{\beta}, k \in \mathbb{R}^* \Rightarrow (a, b) = k(\gamma, \delta) \Rightarrow (a, b) = (k\gamma, k\delta)$

$\vec{\alpha} = k\vec{\beta}, k \in \mathbb{R}^* \Rightarrow (a, b) = k(\gamma, \delta) \Rightarrow (a, b) = (k\gamma, k\delta)$

$\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{b}{a}, \lambda_{\vec{\beta}} = \frac{\delta}{\gamma},$ όπως $\vec{\alpha} = k\vec{\beta}, a = k\gamma$ επομένως $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{k\delta}{k\gamma} = \frac{\delta}{\gamma} = \lambda_{\vec{\beta}}$.

⊛ Επίσης, ο συντελεστής μιας ευθείας ορίζεται ως η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα xx' .

(ε) $\epsilon\phi\omega = \lambda(\epsilon) = ?$ αν μας δοθεί η εξίσωση της ευθείας
όπως



Έστω $(\epsilon): \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \dots \Rightarrow Ax + By + \Gamma = 0, (A, B) \neq (0, 0)$

$\begin{cases} z=0 \end{cases}$

(Συνεται η (ϵ) με την $z=0$ επινοούμε και $Ax + By + \Gamma = 0$ για την $z=0$)

Ψαχνοντας ^{"αποδεικνύω"} αν συνελέγον διευθύνσεις της (ε) και είναι προφανές ότι
 ο $\lambda(\varepsilon)$ είναι ο ίδιος για οποιαδήποτε παράλληλο διάνυσμα της (ε).
 Ορίζεται ένα παράλληλο διάνυσμα της (ε). Παρατηρούμε ότι το $(A, B) \perp (\varepsilon)$

$$\Rightarrow (B, -A) \parallel (\varepsilon) \text{ λόγω } (*), \text{ καθώς } \lambda(\varepsilon) = \lambda_{\varepsilon} = -\frac{A}{B} \text{ (ή το αντίστροφο)}$$

$$(*) : (m) : Ax + By + \underbrace{\gamma}_{\neq 0} + \Delta = 0 \quad Ax + By + \gamma = 0 \quad (A, B) \perp (0, 0)$$

$$\vec{n} = (A, B, \gamma) \perp$$

$$\vec{n} = (A, B, \gamma) \perp$$

Θέλω παράλληλο $\perp$ στο $L (= \vec{n})$

$$\text{δίνω ευθεία που γιγύρεται} = 0 : (\dots, \dots) \cdot (A, B) = 0$$

Αρα: έχω γενική ~~αποδεικνύω~~ εξίσωση της (ε) στο $Oxy : \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$$\Rightarrow y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} (x-x_1) \Rightarrow \boxed{\lambda(\varepsilon) = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}} \text{, αν αυτός ορίσεται.}$$

Παρατήρηση: * Δύο ευθείες έχουν ίδιο συνελέγον διευθύνσης $\Leftrightarrow$ είναι παράλληλες.

Από:

$(\Leftarrow)$ προφανώς εἴ' ορίσεται

$$(\Rightarrow) (\varepsilon_1) : A_1x + B_1y + \gamma_1 = 0, (A_1, B_1) \neq (0, 0), \lambda(\varepsilon_1) = -\frac{A_1}{B_1}$$

$$(\varepsilon_2) : A_2x + B_2y + \gamma_2 = 0, (A_2, B_2) \neq (0, 0), \lambda(\varepsilon_2) = -\frac{A_2}{B_2}$$

$$\text{και } \lambda(\varepsilon_1) = \lambda(\varepsilon_2) \Rightarrow -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$$

Ένα παράλληλο διάνυσμα της $(\varepsilon_1) : (B_1, -A_1)$

$$(\varepsilon_2) : (B_2, -A_2)$$

Για να είναι οι $(\ell_1) \parallel (\ell_2)$ οπότε οι $(B_1, -A_1), (B_2, -A_2)$ να είναι γραμμικά εξαρτημένα (παράλληλα)

$$\text{Άρα, } -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \Rightarrow \frac{-A_1}{-A_2} = \frac{B_1}{B_2} = k \Rightarrow \begin{matrix} B_1 = k B_2 \\ -A_1 = k (-A_2) \end{matrix}$$

$$\text{Συνεπώς } (B_1, -A_1) = k(B_2, -A_2)$$

Παρατήρηση Δύο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους, αν $\lambda(\ell_1) \cdot \lambda(\ell_2) = -1$.

Απόδ.

$(\Leftrightarrow)$ προφανώς εφ' όριστος

$$(\Rightarrow), (\ell_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, \vec{n}_1 = (A_1, B_1) \perp (\ell_1), \lambda(\ell_1) = -\frac{A_1}{B_1}$$

$$(\ell_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0, \vec{n}_2 = (A_2, B_2) \perp (\ell_2), \lambda(\ell_2) = -\frac{A_2}{B_2}$$

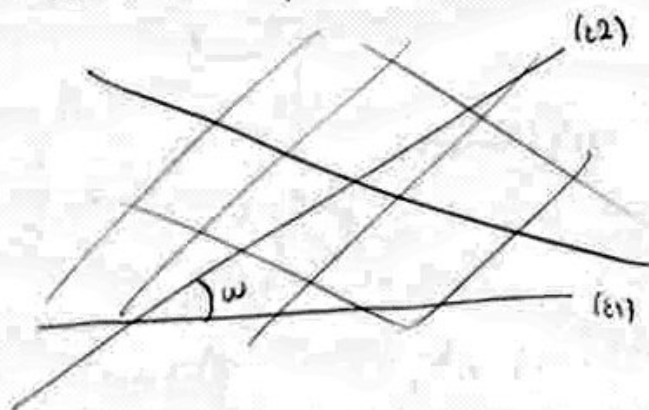
$$(\ell_1) \perp (\ell_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \xLeftrightarrow[B_1B_2 \neq 0] -\frac{A_1}{B_1} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{1}{\frac{A_2}{B_2}} = \frac{1}{-\lambda(\ell_2)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\ell_1) = -\frac{1}{\lambda(\ell_2)} \Leftrightarrow \boxed{\lambda(\ell_1) \cdot \lambda(\ell_2) = -1} : \text{Συνθήκη κάθετητητας δύο ευθειών (ενήλικες)}$$

• Έστω δύο ενήλικες ω οι ευθείες $(\ell_1), (\ell_2)$ (οχι κάθετες μεταξύ τους).

$$(\ell_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, (A_1, B_1) \neq (0, 0)$$

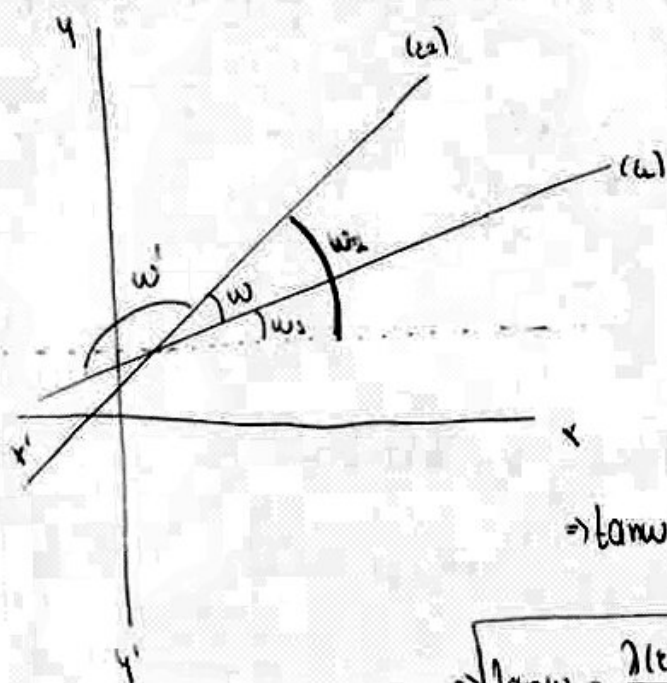
$$(\ell_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0, (A_2, B_2) \neq (0, 0)$$



και έστω $\omega = (\ell_1)^\wedge (\ell_2)$.

Ψάχνουμε την $\tan \omega$.

(ήδη το σήμα)



$$\text{όμως } \tan w_1 = \lambda(l_1)$$

$$\text{όμως } \tan w_2 = \lambda(l_2)$$

Παρατηρούμε ότι: $w = w_2 - w_1$

$$\Rightarrow \tan w = \tan(w_2 - w_1)$$

$$\Rightarrow \tan w = \frac{\tan w_2 - \tan w_1}{1 + \tan w_1 \tan w_2}$$

$$\Rightarrow \tan w = \frac{\lambda(l_2) - \lambda(l_1)}{1 + \lambda(l_1) \lambda(l_2)}$$

Υπενθύμιση

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

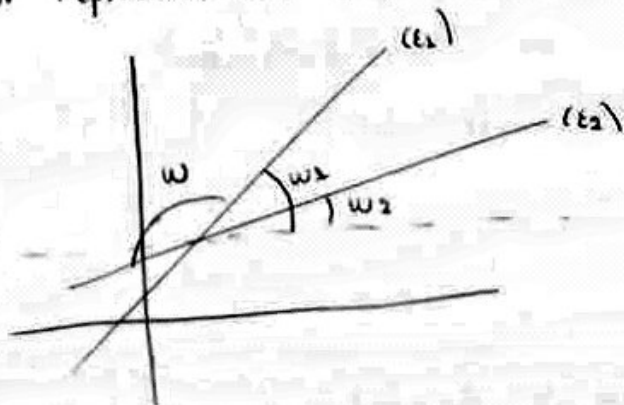
$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

~~tan w = tan(w2 - w1)~~

$\tan w = \tan(\pi - w)$ (παρόμοιους γωνίες)

(δεν ισχύει αυτό)

Για την περίπτωση που έχουμε:



$$\text{τότε: } \tan w = \tan(\pi - (w_1 - w_2))$$

$$\Rightarrow \tan w = \tan(\pi + (w_2 - w_1))$$

$$\Rightarrow \tan w = \tan(w_2 - w_1)$$

$$\text{έστω ότι } \tan w = \frac{\lambda(l_2) - \lambda(l_1)}{1 + \lambda(l_1) \lambda(l_2)}, \text{ όμως } w = (\hat{l_1}, \hat{l_2})$$

$$\text{Αρα } (l_1) \parallel (l_2) \Rightarrow w = 0 \text{ (ή } \pi) \Rightarrow \tan w = 0 \Rightarrow \lambda(l_1) = \lambda(l_2).$$

$$(l_1) \perp (l_2) \Rightarrow \text{δεν ορίζεται } \tan w \Leftrightarrow \lambda(l_1) \cdot \lambda(l_2) = -1.$$

1. Παράδειγμα Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών $(\ell_1), (\ell_2)$ οι οποίες διέρχονται από το $A(5, 4)$ και (i) η $(\ell_1) \parallel$ προς την (ℓ) : $2x + 3y - 6 = 0$ και (ii) η $(\ell_2) \perp (\ell)$

Λύση

(i) $(\ell_1) \parallel (\ell) \Rightarrow \lambda(\ell_1) = \lambda(\ell) = -\frac{2}{3} \Rightarrow y - y_1 = \lambda(x - x_1)$

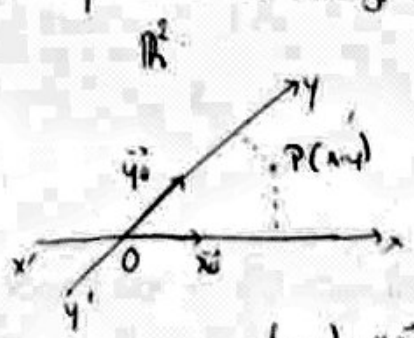
επομένως $A(5, 4) \in (\ell_1) \Rightarrow y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 5) \quad (\ell_1)$

2. (ii) $(\ell_2) \perp (\ell) \Rightarrow \lambda(\ell_2) \cdot \lambda(\ell) = -1 \Rightarrow \lambda(\ell_2) = (-\frac{2}{3})^{-1} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \lambda(\ell_2) = \frac{3}{2}$

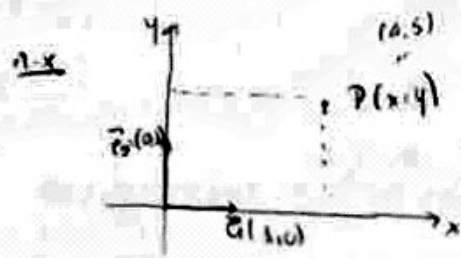
επομένως $A(5, 4) \in (\ell_2) \Rightarrow y - 4 = \frac{3}{2}(x - 5) \quad (\ell_2)$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ :

(1) Καρτεσιανός συντεταγμένος :

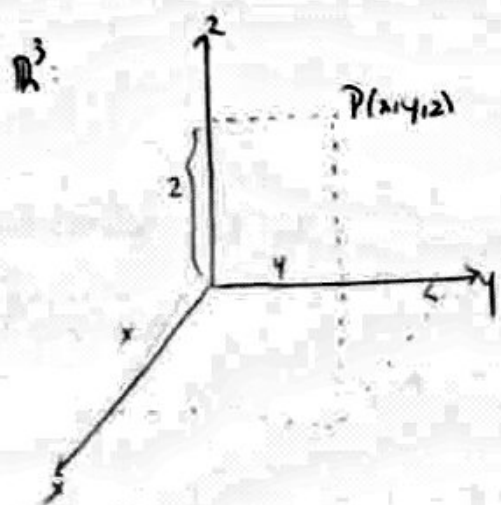
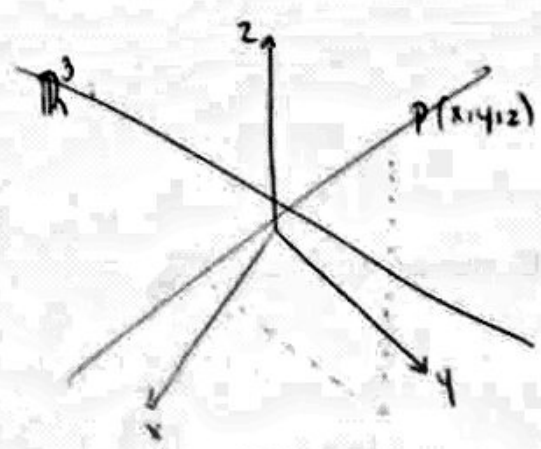


$(xy) = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0$

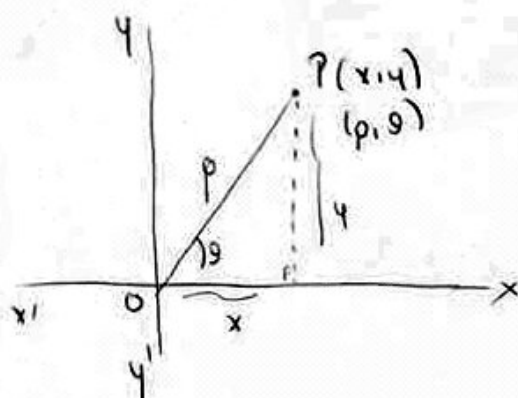
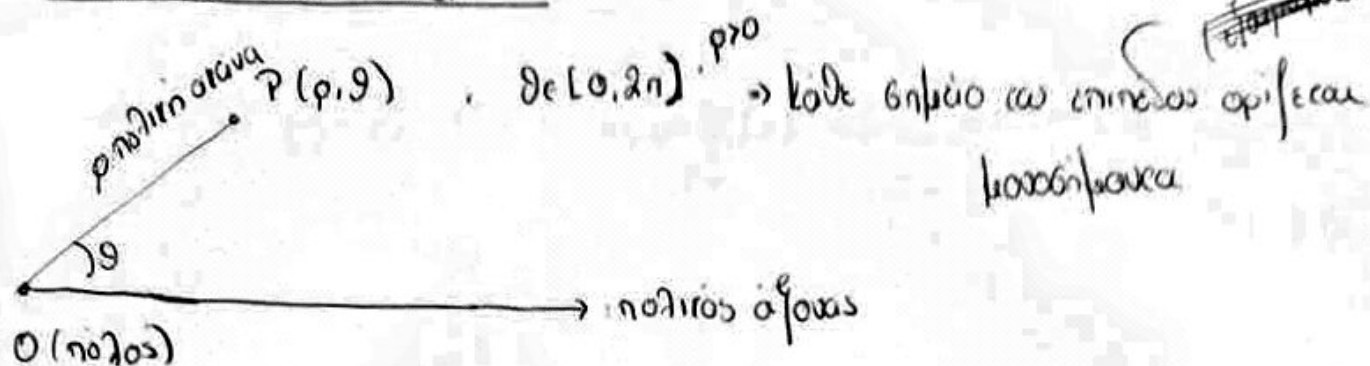


Ορθοκανονικά

$(xy) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$



(2) Πολικές Συντεταγμένες



Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \end{cases}, p > 0, \theta \in [0, 2\pi)$$

Για να πούμε από πολικές σε καρτεσιανές:

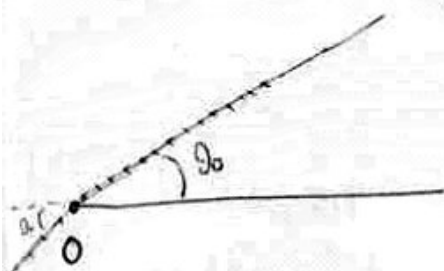
(υψώνω² και προσθέτω):

$$\begin{cases} p^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow p = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arctg} \frac{y}{x} \end{cases}$$

7.8

(1) Η εξίσωση $\theta = \theta_0$ δας πολικές συντεταγμένες:

→ σταθερή γωνία είναι το σύνολο των σημείων επιπέδου που έχουν γωνία με πολικό άξονα θ_0 .



(2) Η εξίσωση $\rho = k \cdot r$ δας πολικές συντεταγμένες

→ παρίστανται κύκλοι κέντρου O και ακτίνας k .

